المحاضرة ⑥ حل جملة المعادلات الخطية

أولاً : الشكل العام لجملة m معادلة خطية بـ n مجهول :

إن الشكل العام لجملة m معادلة خطية بـ n مجهول هو:

$$
(\star)\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{4n}x_n = b_4 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

- نسمي العناصر a_{ij} المعاملات أو الأمثال
- نسمي العناصر b_i الثوابت
- نسمي العناصر x_i المجاهيل

و نميز حالتين :

- إذا كانت جميع العناصر b_i معدومة سُميت الجملة متجانسة
- إذا كان أحد عناصر b_i على الأقل غير معدوم سُميت الجملة غير متجانسة
- نسمي المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات أو الأمثال
- نسمي المصفوفة $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت
- نسمي المصفوفة $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ مصفوفة المجاهيل
- نسمي المصفوفة $H = (A : b)$ المصفوفة الموسعة

تعاريف :

1) المصفوفة المدرجة : هي مصفوفة يتزايد عدد الأصفار السابقة لأول عنصر غير صفري في كل سطر فيها من سطر لآخر .و يسمى العنصر الأول غير الصفري في كل سطر عنصراً مميزاً.

مثال : $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 5 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مدرجة عدد عناصرها المميزة 3 وهي 1 و 2 و 7 .

2) المصفوفة المدرجة المختزلة : هي مصفوفة مدرجة عناصرها المميزة تساوي الواحد و هي الوحيدة في أعمدتها مغايرة للصفر ، أي أن العنصر المميز هو العنصر الوحيد في عموده ليس صفراً ، إذ إن بقية عناصر عموده جميعها أصفار.

مثال : $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مدرجة مختزلة.

ملاحظة مهمة جداً : إن رتبة المصفوفة المدرجة تساوي عدد عناصرها المميزة.

مبرهنة عدد الحلول :

إذا كانت لدينا جملة مؤلفة من m معادلة خطية و n مجهولاً و تحقق الشرط $r(A) = r(H) = r$

فعندئذٍ يكون للجملة :

- حل وحيد إذا كان $r = n$
- عدد غير منته من الحلول إذا كان $r < n$ و في هذه الحالة يوجد $(n - r)$ مجهولاً اختيارياً (تسمى مجاهيل حرة) و باقي المجاهيل و عددها r (تسمى مجاهيل أساسية) تأخذ قيماً معينة بشكل وحيد.

ملخص بسيط لمناقشة عدد حلول جملة مؤلفة من m معادلة خطية و n مجهولاً

عدد المعادلات	عدد المجاهيل	رتبة مصفوفة الأمثال و المصفوفة الموسعة	عدد الحلول	عدد المجاهيل الاختيارية
m	n	$r(A) = r(H) = r = n$	حل وحيد	0
m	n	$r(A) = r(H) = r < n$	غير منته	$n - r$
m	n	$r(A) \neq r(H)$	مستحيلة	-

ناقش بحسب قيم α مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية $A \cdot X = b$ التي مصفوفتها الموسعة هي :

❖ $H = (A|b) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & \alpha - 2 & 0 & \vdots & \alpha^2 - 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 + \alpha - 6 & \vdots & \alpha + 3 \end{bmatrix}$

الحل :

- $H = (A|b) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & \alpha - 2 & 0 & \vdots & \alpha(\alpha - 2) \\ 0 & 0 & (\alpha + 3)(\alpha - 2) & \vdots & \alpha + 3 \end{bmatrix}$

❶ عندما : $\alpha \in \mathbb{R} / \{2, -3\}$ يكون :

- $\left.\begin{matrix} r(A) = 3 \\ r(H) = 3 \end{matrix}\right\} \to r(A) = r(H) = 3 = n \to$ للجملة حل وحيد

❷ عندما : $\alpha = 2$ يكون :

- $H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \to \begin{Bmatrix} r(A) = 1 \\ r(H) = 2 \end{Bmatrix} \to r(A) \neq r(H) \to$ الجملة مستحيلة الحل

❸ عندما : $\alpha = -3$ يكون :

- $H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & 0 & \vdots & 15 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{Bmatrix} r(A) = 2 \\ r(H) = 2 \end{Bmatrix} \to r(A) = r(H) = 2 < (n = 3) \to$

للجملة عدد غير منته من الحلول ، و عدد المجاهل الاختيارية هو : $(n = 3) - (r = 2) = 1$

ثانياً : حل جملة n معادلة خطية بـ n مجهول :

في هذه الحالة تكون مصفوفة المعاملات A مصفوفة مربعة و يمكن حل هذه الجملة بأكثر من طريقة نذكر منها

❶ حل الجملة باستخدام معكوس (مقلوب) المصفوفة :

تُكتب جملة المعادلات الخطية في هذه الحالة بالشكل $AX = b$ نضرب طرفي العلاقة بمعكوس المصفوفة A فنجد :

$$\boxed{AX = b} \Rrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Rrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}b \Rrightarrow (I)X = A^{-1}b \Rrightarrow \boxed{X = A^{-1}b}$$

مثال (1) : حل جملة المعادلات : $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 4z & = & -7 \\ 6x & + & 9y & - & 2z & = & 18 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{array}\right\}$

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 4z & = & -7 \\ 6x & + & 9y & - & 2z & = & 18 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{array}\right\} \Rrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix}$

- $AX = b \Rrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b$

- $(A^{-1}A)X = A^{-1}b$

- $(I)X = A^{-1}b$

- $\boxed{X = A^{-1}b}$

- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 19 \\ 38 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{bmatrix}$

❷ حل الجملة باستخدام طريقة كرامر (بالاستفادة من المحددات) :

خطوات الحل بطريقة كرامر

① نحسب محدد مصفوفة المعاملات Δ ، حيث $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

② نعرف المحدد Δ_i الذي نحصل عليه باستبدال العمود ذي الرتبة i من محدد المصفوفة A بعمود الثوابت b

③ نميز الحالات التالية :

❶ $\Delta\neq 0$ عندها لجملة المعادلات الخطية حل وحيد هو $x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$ حيث $i=1,2,\cdots,n$

❷ $\Delta=0$ نميز حالتين :

- جميع المحددات Δ_i حيث $i=1,2,\cdots,n$ معدومة أي $(\Delta_i=0)$ عندها لجملة المعادلات عدد غير منته من الحلول.
- أحد المحددات Δ_i على الأقل غير معدوم أي $(\Delta_i\neq 0)$ عندها جملة المعادلات مستحيلة الحل.

مثال : حل جملة المعادلات بطريقة كرامر
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 4z & = & -7 \\ 6x & + & 9y & - & 2z & = & 18 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{array}\right\}$$

- $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=19\neq 0$

- $\Delta_x=\begin{vmatrix} -7 & 1 & -4 \\ 18 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}=19\rightarrow \boxed{x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{19}{19}=1}$

- $\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & -7 & -4 \\ 6 & 18 & -2 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=38\rightarrow \boxed{y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{38}{19}=2}$

- $\Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 6 & 9 & 18 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}=57\rightarrow \boxed{z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{57}{19}=3}$

مثال : ابحث في حلول جملة المعادلات بطريقة كرامر:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & - & 5z & = & 1 & ① \\ x & - & y & + & z & = & 2 & ② \\ 5x & + & 5y & - & 9z & = & 4 & ③ \end{array}$$

- $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 0$
- $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 0$
- $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$
- $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 0$

بما أن $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ فإن لجملة المعادلات المعطاة إما عدد غير منته من الحلول أو الجملة مستحيلة الحل

و لتحديد ذلك نحل جملة المعادلتين ① و ② حلاً مشتركاً و نعوض ما نحصل عليه في المعادلة ③ و نميز بعدها :

- إذا كانت المعادلة ③ محققة عندها نستنتج أن لجملة المعادلات المعطاة ① و ② و ③ عدد غير منته من الحلول.
- إذا كانت المعادلة ③ غير محققة عندها نستنتج أن جملة المعادلات المعطاة ① و ② و ③ مستحيلة الحل.

نحل جملة المعادلتين ① و ② حلاً مشتركاً

- $\begin{array}{lcccc} ① \rightarrow & 2x & + & 3y & = & 1+5z \\ ② \rightarrow & x & - & y & = & 2-z \end{array}$
- $\begin{array}{lcccc} ① \rightarrow ① & 2x & + & 3y & = & 1+5z \\ ② \times 3 \rightarrow ❷ & 3x & - & 3y & = & 6-3z \end{array}$
- $① + ❷ \rightarrow 5x = 7 + 2z \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{5}(7+2z)}$
- $\begin{array}{lcccc} ① \rightarrow ① & 2x & + & 3y & = & 1+5z \\ ② \times (-2) \rightarrow ❷ & -2x & + & 2y & = & -4+2z \end{array}$
- $① + ❷ \rightarrow 5y = -3 + 7z \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{5}(-3+7z)}$

نعوض قيم x و y في المعادلة ③ فنجد أن :

- $7 + 2z - 3 + 7z - 9z = 4 \rightarrow 4 = 4$

و بالتالي جملة المعطاة لها عدد غير منته من الحلول : $S = \left\{ \left(\frac{7+2z}{5}, \frac{-3+7z}{5}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$